

Abstraction markovienne d'un modèle hybride de dynamique forestière

Thibaut Gipteau

Encadrants :

Guillaume CANTIN (Université de Nantes)

Benoît DELAHAYE (Université de Nantes)

Fabien PANLOUP (Université d'Angers)

Avant-propos

Ce document est un rapport de mon stage de fin de master Data Science à l'université d'Angers, stage effectué au Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes du 17 mars 2025 au 17 septembre 2025.

Ce stage était centré sur l'étude d'un modèle hybride d'évolution de forêts, combinant équations aux dérivées partielles et comportements aléatoire. Mon travail s'est orienté sur deux axes successifs :

- Sur la première période de mon stage, j'ai été chargé de réaliser un outil de visualisation destiné aux équipes d'écologues qui s'intéressent naturellement au sujet de l'évolution de forêts. Jusque là, les visualisations proposées étaient mathématiques (graphiques, courbes, cartes de chaleur) et donc d'une lecture difficile pour un public non-initié. J'ai réalisé avec Python des visualisations adaptées au public visé et accessibles.
- Sur la seconde période de mon stage, j'ai mené une étude théorique des modèles étudiés. Afin de vérifier des propriétés de manière peu coûteuse sur un modèle, le projet TOUNDRA auquel j'étais affilié souhaite abstraire le système hybride sous la forme d'une chaîne de Markov, sur laquelle des algorithmes de *model checking* sont applicables. Dans le cadre de mon stage, j'ai réalisé une abstraction de ce type, sur un modèle simple et avec un jeu de paramètres fixés.

Afin de rester au plus proche du cadre universitaire dans lequel j'ai réalisé mon stage, j'ai décidé de présenter ce rapport sous une forme proche d'un article scientifique. On trouvera ainsi mêlé, sans chronologie aucune, les deux axes directeurs du stage, à savoir la visualisation et le travail théorique.

Table des matières

Introduction	3
1 Exposition d'un modèle hybride de dynamique forestière	5
1.1 Partie déterministe	5
1.2 Partie stochastique	6
1.3 Existence et unicité de solutions	7
1.3.1 Notations et définitions	7
1.3.2 Existence et unicité	8
2 Présentation d'un outil de visualisation du modèle hybride	10
2.1 Discrétisation	10
2.2 Modèle à deux équations	10
2.2.1 Différences finies	10
2.3 Modèle à quatre équations	11
2.3.1 Définition du modèle	11
2.3.2 Différences finies	12
2.3.3 Éléments finis	12
3 Analyse de la partie déterministe du modèle hybride	13
3.1 Détermination des équilibres homogènes	13
3.2 Étude de la stabilité des équilibres	14
3.3 Choix des paramètres	19
4 Abstraction du modèle hybride sous la forme d'une chaîne de Markov	20
4.1 Approche	20
4.2 Discrétisation	21
4.3 Construction du modèle de Markov	22
4.3.1 Partie déterministe	22
4.3.2 Partie stochastique	22
4.3.3 Couplage des deux modèles	23
4.4 Estimation des probabilités de transition du modèle couplé . .	25
4.4.1 Choix d'une norme	25
4.4.2 Choix de T et ξ	26
4.4.3 Résultats des simulations	27
4.5 Réécriture uniforme en temps de la chaîne	27

5 Étude d’une propriété émergente sur la chaîne de Markov	30
5.1 Définition de la propriété d’oscillation	30
5.2 Expression de la probabilité d’osciller	31
5.3 Calcul de la probabilité d’osciller	33
5.4 Interprétation	35
6 Discussion	36
A Annexes	38

Introduction

Contexte

Comme conséquence du changement climatique des dernières années, on observe un accroissement des événements extrêmes impactant les forêts, tant en intensité qu’en fréquence [5]. Ces phénomènes, qui peuvent être climatiques (feux, inondations) ou directement dus à une action humaine (déforestation) viennent perturber l’évolution naturelle des forêts. Dans ce contexte, on se pose la question de la persistance des écosystèmes face à ces phénomènes. On se demande plus clairement si il est possible d’évaluer la possibilité, pour une forêt, de se maintenir ou de périr lorsqu’exposée à une certaine combinaison d’intensité et de fréquence d’événements extrêmes. Il est en outre nécessaire, dans cette démarche, de délier les effets de ces événements de ceux attribués à des dynamiques naturelles. Cette évaluation requiert des observations de terrain, mais aussi la construction et l’emploi de modèles à même de représenter les deux systèmes, l’un accidentel et l’autre écologique, influant conjointement sur l’évolution des forêts.

C’est pour répondre à ces questions qu’est mené le projet TOUNDRA. Plus précisément dans le cadre de cet article, on s’intéresse à des modèles mathématiques hybrides, représentant l’interaction écologie-accident à travers la combinaison d’un système de réaction-diffusion et d’un processus aléatoire discret d’apparition d’événement extrême.

Motivations

L’étude de modèles hybride résiste à la plupart des techniques usuelles associées aux équations aux dérivées partielles. Dans les articles précédents, on pallie ce problème par l’utilisation de méthodes de *model-checking* statistique. Ces méthodes requièrent l’emploi d’un très grand nombre de simulations du modèle hybride. L’objectif pour le projet TOUNDRA est, pour

le moment, de parvenir à appliquer des méthodes de *model-checking* symbolique aux modèles hybrides, c'est à dire de s'affranchir du très grand nombre de simulations jusque là nécessaire. Pour réaliser cet objectif, le modèle doit être abstrait sous la forme d'une chaîne de Markov.

Plan

Dans un premier temps, on exposera le modèle hybride employé dans le cadre de l'étude, et notamment la combinaison de l'évolution naturelle et des feux de forêt à travers ce modèle. On montrera également un travail de visualisation informatique destiné à des acteurs extérieurs n'étant pas familiers avec le modèle et les mathématiques en général. On expliquera la nature des paramètres en jeu, puis les méthodes employées pour fixer leurs valeurs dans la suite de l'étude.

Dans un second temps, on s'attachera à construire une chaîne de Markov représentant le modèle hybride, dont on estimera ensuite les paramètres par des méthodes numériques, nommément Monte-Carlo. Finalement, on essaiera de vérifier une propriété sur le modèle - dite «d'oscillation» - à l'aide de la chaîne de Markov.

1 Exposition d'un modèle hybride de dynamique forestière

L'objet d'étude de cet article est un modèle hybride représentant l'évolution d'une forêt, avec ses dynamiques écologiques et des dynamiques d'évènements extrêmes, tels des feux de forêt. On décrit dans cette section le modèle en question, et on mène une analyse classique sur sa partie déterministe, régie par des équations aux dérivées partielles.

1.1 Partie déterministe

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné - on rappelle qu'un domaine est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Ce domaine représente la région géographique occupée par la forêt à l'étude. La partie déterministe de notre modèle est composée des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \beta \delta w(t, x) - u(t, x) \left(a(u(t, x) - b)^2 + c \right), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = d \Delta w(t, x) + \alpha u(t, x) - \beta w(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

qui forment un système de réaction-diffusion parabolique dégénéré en diffusion dans la première équation.

Les inconnues $u = u(t, x)$ et $w = w(t, x)$ sont des fonctions du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de la variable d'espace $x \in \Omega$, représentant respectivement les densités en arbres et en graines en un instant donné et en un point donné.

On ajoute à ce système une condition au bord, dite de Neumann, qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(t, x) = 0$$

sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω , où $\nu(x)$ est normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x . Cette condition signifie que les graines peuvent s'accumuler au bord du domaine mais ne peuvent pas en sortir.

Finalement, on pose les conditions initiales à $t = 0$ avec :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega.$$

L'évolution de la densité en arbres est dépendante d'une part de la densité en graines pondérée par un facteur de pousse δ , et d'autre part d'un taux de mortalité. Ce dernier est quadratique en u , permettant de combiner une mortalité minimale (c dans l'équation) et des mortalité de surpeuplement et

sous-peuplement. On remarque de plus l'utilisation d'un terme de diffusion, représentant à juste titre la diffusion des graines (vent, animaux, etc...). Sur la diffusion des graines dans un cadre d'écosystème de forêts, on renvoie vers [7]. On trouvera dans le tableau 1 les unités des inconnues et des paramètres, qui sont tous définis positifs.

Inconnue	Symbole	Unité
Densité des arbres	u	arbres $\times$ ha $^{-1}$
Densité des graines	w	graines $\times$ ha $^{-1}$
Paramètre	Symbole	Unité
Fréquence de dépôt des graines	β	année $^{-1}$
Fréquence de production des graines	α	année $^{-1}$
Fréquence de pousse des graines	δ	année $^{-1}$
Facteur de diffusion des graines	d	ha $^2 \times$ année $^{-1}$
Facteurs de mortalité des arbres	a, b, c	

TABLEAU 1 – Inconnues et paramètres du modèle de réaction-diffusion

1.2 Partie stochastique

On souhaite coupler le modèle déterministe précédent avec une dynamique de feux de forêts, pour laquelle viennent s'ajouter trois paramètres :

- $\tau > 0$, le délai de temps minimal entre deux occurrences possibles de feu,
- $p \in [0, 1]$, la probabilité qu'un feu se déclenche à un temps $k\tau$ donné, et
- $I \in [0, 1]$, l'intensité d'un feu.

On se bornera dans cette étude à fixer ces paramètres comme indépendants de la variable espace-temps.

L'action des feux est modélisée selon la méthode suivante : à chaque pas de temps $k\tau$, $k \in \mathbb{N}$, on tire selon une loi de Bernoulli $\theta(k\tau) \sim \mathcal{B}(p)$ la réalisation d'un feu. On considère qu'un feu a lieu au temps $k\tau$ si et seulement si $\theta(k\tau) = 1$.

Si un feu a bien lieu au temps $t' = k'\tau$, on choisit aléatoirement un sous-domaine ω de Ω comme un disque de centre et de rayon uniformément aléatoire. La trajectoire du système de réaction-diffusion est interrompue, et le système est réinitialisé avec les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = (1 - I)u(t', x), \quad v_0 = (1 - I)v(t', x) \quad \forall x \in \omega \quad (1.2)$$

$$u_0(x) = u(t', x), \quad v_0 = v(t', x) \quad \forall x \in \Omega \setminus \omega \quad (1.3)$$

Exemple 1.1. Un choix de $I = 0.3$ signifie que pour un feu donné, 30% des arbres présents dans le rayon d'action du feu meurent.

1.3 Existence et unicité de solutions

Dans un premier temps, il est judicieux de vérifier l'existence et l'unicité de solutions de notre système. A ce sujet, on se basera très largement sur [10](chap. 11).

Dans cette sous-section, on cherchera à montrer l'existence et l'unicité de solutions globales au système (1.1), c'est à dire la partie déterministe de notre modèle. D'abord, on posera un ensemble de définitions et de notations. On appliquera ensuite des résultats de [10] pour justifier l'existence de solutions locales. Puis, une majoration de ces solutions par une constante de dissipation permettra de justifier l'existence et l'unicité de solutions globales.

1.3.1 Notations et définitions

Pour le moment, nous n'avons pas défini d'espace fonctionnel pour les fonctions u et w , représentant les densités en arbres et en graine respectivement. Nous décidons de choisir pour ces fonctions les espaces $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ respectivement, cela sur la variable en espace. Plus exactement, on écrit les fonctions partielles comme :

$$\begin{aligned} \tilde{u} : [0, \infty[&\longrightarrow X := L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) & \text{et} & \quad \tilde{w} : [0, \infty[&\longrightarrow Y := L^2(\Omega, \mathbb{R}) \\ t &\longmapsto u(t, \cdot) & & & t &\longmapsto w(t, \cdot) \end{aligned}$$

En écrivant $U = (u, w)$ solution de (1.1), nous avons

$$\begin{aligned} U : [0, \infty[\times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (u(t, x), w(t, x)) \end{aligned}$$

On introduit par la suite une réécriture sous forme de fonction partielle, pour cacher la variable d'espace :

$$\begin{aligned} \tilde{U} : [0, \infty[&\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto U(t, \cdot) \end{aligned}$$

et en utilisant dès lors cette réécriture, nous noterons par abus de langage, et pour simplifier le propos, $U = (u, w)$ plutôt que $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{w})$. Nous avons donc écrit notre solution comme *une fonction d'une seule variable de temps $t \in [0, \infty[$ vers un produit d'espaces fonctionnels sur Ω .*

1.3.2 Existence et unicité

On commence par écrire le système (1.1) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U) & \forall t \in]0, \infty[, \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où la condition initiale est toujours positive et appartient à l'espace de fonctions défini plus tôt, autrement dit est telle que

$$U_0 \in \mathcal{K} := \{(u, w) \in X \times Y, u \geq 0, w \geq 0\},$$

Dans notre cas, l'expression explicite de la forme (1.4) se calcule, avec

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \begin{pmatrix} \beta\delta w - u(a(u - b^2) + c) \\ d\Delta w + \alpha u - \beta w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -ab^2 - c & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} -au^3 - 2abu^2 - \beta\delta w \\ \alpha u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où Λ est la réalisation de l'opérateur $-d\Delta + \beta$ avec condition de Neumann. Notons que l'opérateur Λ a pour domaine l'espace de Sobolev avec condition de Neumann $H_N^2(\Omega)$, défini par

$$H_N^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega), \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

et on rappelle que

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq 2\}.$$

où la dérivée est entendue au sens des distributions.

Nous avons ensuite

$$\frac{dU}{dt} + \begin{pmatrix} ab^2 + c & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} -au^3 - 2abu^2 - \beta\delta w \\ \alpha u \end{pmatrix},$$

et on identifie alors, avec les notations précédentes

$$A = \begin{pmatrix} ab^2 + c & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

et

$$F(U) = \begin{pmatrix} -au^3 - 2abu^2 - \beta\delta w \\ \alpha u \end{pmatrix}.$$

La preuve de l'existence et de l'unicité de solutions locales demande l'utilisation de la notion d'opérateur fractionnaire, notion qui est au delà du cadre de cette étude. Nous admettons donc le lemme suivant, résultat dont une preuve complète est disponible dans [10].

Étant donné $\mathcal{D}(A) = L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \times H_N^2(\Omega)$, nous avons

Lemme 1.2. *Pour tout $U_0 \in \mathcal{K}$, le problème (1.4) possède une unique solution locale $U = (u, w)$, dont l'espace de fonctions est défini par*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0, T_{U_0}], L^\infty(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(]0, T_{U_0}], L^\infty(\Omega)) \\ w \in \mathcal{C}([0, T_{U_0}], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(]0, T_{U_0}], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(]0, T_{U_0}], H_N^2(\Omega)) \end{cases} \quad (1.5)$$

Les solutions globales existent dès lors qu'on peut majorer toute solution locale par une constante indépendante du temps. Pour le modèle à deux équations présenté ici, une telle constante existe, et la preuve de son existence est visible dans [3](sect. 3.5).

Cette constante nous permet de poser le théorème suivant, dans lequel le temps maximal T ne dépend plus de la condition initiale :

Théorème 1.3. *Pour tout $U_0 \in \mathcal{K}$, le problème (1.4) possède une unique solution globale $U = (u, w)$, dont l'espace de fonctions est défini par*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0, T], L^\infty(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(]0, T], L^\infty(\Omega)) \\ w \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(]0, T], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(]0, T], H_N^2(\Omega)) \end{cases} \quad (1.6)$$

2 Présentation d'un outil de visualisation du modèle hybride

La première partie du travail de stage a consisté en une prise en main du modèle. A cette fin, on a d'abord travaillé à un outil de visualisation pure, sans approche théorique. Ce travail est présenté dans cette section.

Les dynamiques forestières, en plus de fournir un sujet mathématiquement intéressant, sont principalement un sujet d'étude pour les écologues. Dans ce cadre, nous avons réalisé un outil de visualisation destiné à un public n'ayant pas de bagage mathématique, et permettant de fixer un jeu de paramètres, puis d'observer l'évolution d'une forêt suivant notre modèle avec les paramètres choisis. Les programmes réalisés le sont tous en langage Python. Les modules utilisés sont précisés au fur et à mesure de la section.

2.1 Discrétisation

Afin de simuler notre modèle, nous introduisons une double discrétisation de notre espace-temps :

- en temps, une discrétisation par Runge-Kutta ;
- en espace, une méthode de type différences finies pour un domaine rectangulaire, et la méthode des éléments finis dans le cadre d'un domaine elliptique.

Rappelons que n'importe laquelle de ces discrétisations, en espace comme en temps, implique naturellement une perte de précision : tout travail réalisé par la suite en se basant sur cette discrétisation contient obligatoirement un caractère approximatif.

L'étude des méthodes de discrétisation n'étant pas au cœur du stage, nous renvoyons à [1] pour plus d'informations à ce sujet, et à [9] pour une étude de leur convergence.

2.2 Modèle à deux équations

2.2.1 Différences finies

Par modèle à deux équations, on entend le modèle (1.1) présenté plus tôt. Dans ce cadre, on discrétise d'abord le problème avec une méthode différences finies/Runge-Kutta. Les paramètres de cette discrétisation sont visibles dans le tableau 2.

Comme dit plus haut, le domaine étudié est nécessairement rectangulaire (on l'a même pris carré ici). Un fichier `YAML` destiné à l'utilisateur permet de

Paramètre	Valeur	Description
L	20	Taille d'un côté de l'espace de forêt (carré)
J	40	Nombre de pas d'espace, i.e. $dx = L/J$
T	26	Temps maximal de simulation
N	1000	Nombre de pas de temps, i.e. $dt = T/N$

TABLEAU 2 – Paramètres de la simulation

réglér les paramètres de la simulation, à savoir les paramètres du tableau 1 et les paramètres de discrétisation du tableau 2. Eventuellement, l'utilisateur peut ajuster les paramètres du rendu (échelle, vitesse de rendu...).

Ensuite, nous utilisons le module `scipy`, en particulier `linalg` et `integrate`, pour calculer les trajectoires du modèle partant d'un état initial aléatoire. Cette trajectoire est calculée sur un temps maximal défini par l'utilisateur.

Finalement, nous utilisons le module `pygame` pour la partie rendu. C'est un module suffisamment bas niveau pour laisser une grande liberté quant au visuel. Dans un premier temps, le programme récupère l'entièreté des données de la simulation, puis détermine pour chaque instant t le nombre d'arbres à afficher sur chaque case de forêt en fonction de la densité à ce point. Les graines (variable w) ne sont pas affichées. Il détermine également, en fonction des données de feux sauvegardées lors de la simulation, les feux à afficher, modifiant l'apparence des arbres le cas échéant (arbres en train de brûler, arbres morts). Ensuite, `pygame` affiche un rendu - fluide grâce aux calculs déjà faits en amont. Un curseur permet d'arrêter la lecture automatique et de contrôler à la main le temps.

On sauvegarde les *frames* du rendu dans un dossier dédié, permettant éventuellement de réaliser une vidéo.

Nous montrons sur la figure 12 en annexe deux images tirées de notre outil de visualisation.

2.3 Modèle à quatre équations

2.3.1 Définition du modèle

Le modèle à deux équations, bien que n'étant pas le sujet principal de ce rapport, est le premier sur lequel a été mené le travail de visualisation. Il vise à simuler le comportement d'une forêt composée de deux espèces d'arbres, dites « boréale » et « tempérée » respectivement. Les quatre équations sont donc celles des densité en arbres et en graines de chacune des espèces. On souhaite inclure dans ce modèle une dynamique de compétition, impliquant un terme de mortalité reliant les densités des deux espèces entre elles. On introduira

également une mortalité induite par la position, à savoir plus haute dans le nord pour les arbres tempérés, et plus haute dans le sud pour les arbres boréals, afin de modéliser une dépendance à la température.

Le modèle s'écrit alors sous la forme du système (2.1).

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t}(t, x) = \beta_1 \delta_1 w_1(t, x) - \gamma(u_1, u_2) - \mu(u_1, u_2), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w_1}{\partial t}(t, x) = d_1 \Delta w_1(t, x) + \alpha_1 u_1(t, x) - \beta_1 w_1(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega. \\ \frac{\partial w_2}{\partial t}(t, x) = \beta_2 \delta_2 w_2(t, x) - \gamma(u_1, u_2) + \mu(u_1, u_2), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w_2}{\partial t}(t, x) = d_2 \Delta w_2(t, x) + \alpha_2 u_2(t, x) - \beta_2 w_2(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

où la mortalité est maintenant régie par des fonctions γ et μ .

- γ modélise une compétition globale, indépendante de l'espèce. Par exemple, l'effet négatif d'une surpopulation en un point donné.
- μ modélise une compétition dépendante de l'espèce. En l'occurrence, on représente la mortalité relative à la position précisée plus haut : cette mortalité est de signe inversée en fonction de l'espèce considérée.

2.3.2 Différences finies

On applique pour ce modèle un programme presque en tout point similaire à celui utilisé pour le modèle à deux équations, la seule différence étant que les points d'apparition possible des arbres sur les cases sont répartis de manière équitable entre chaque espèce.

On donne sur la figure 13 en annexe deux images tirées de cet outil de visualisation.

2.3.3 Éléments finis

Comme mentionné plus tôt, on peut également vouloir représenter une forêt dont le domaine n'est pas rectangulaire, mais, par exemple, elliptique. Dans ce cadre, la méthode des différences finies et Runge-Kutta n'est plus valide. On se tourne vers la méthode des éléments finis.

Pour l'appliquer on utilisera le logiciel libre **FreeFEM++**[8], réalisé en langage C++. D'une part l'implémentation de cette méthode en Python demanderait plus de temps, d'autre part sa complexité justifie l'utilisation d'un langage compilé comme C++ - les simulations avec **FreeFEM++** étant déjà beaucoup plus longues que celles en différences finies avec Python.

Ici, l'utilisation de **FreeFEM++** vient changer légèrement le programme. La partie simulation est passée en subprocess à **FreeFEM++**, qui est chargé

d'émettre un fichier **EOP** en fin de simulation. Après réception de celui-ci, le script **Python** passe aux calculs déjà mentionné plus tôt : la différence provient du découpage en triangles du domaine, découpage provenant de la méthode des éléments finis. Le programme associe à chaque triangle une densité en arbres et graines qui est la moyenne de celle de ses trois sommets. Enfin, le rendu est réalisé de la même manière que dans le cadre d'un domaine carré, la projection isométrique utilisée se faisant point par point, et étant donc indépendante de la forme du domaine.

On donne sur la figure 14 en annexe deux images issues de cet outil de visualisation.

3 Analyse de la partie déterministe du modèle hybride

On souhaite dans notre travail se restreindre à une étude numérique du modèle, par opposition à une étude paramétrique : autrement dit, on souhaite se fixer un jeu de paramètres au plus tôt, pour mener l'étude sur un cas particulier. Reste ouverte la question du choix de ces paramètres.

Le choix des paramètres peut être motivé soit par une estimation de ceux-ci basée sur des données réelles, soit par un raisonnement analytique. C'est cette dernière option qui est ici explorée. On approfondira l'étude de la partie déterministe du modèle, engagée à la sous-section 1.3, pour déterminer ses équilibres homogènes, qui représenteront des états extrêmes de la forêt. Finalement, on étudiera la stabilité de ces équilibres, afin d'éclairer notre choix de paramètres dans la dernière sous-section.

3.1 Détermination des équilibres homogènes

A partir du système en (1.1), on peut facilement déterminer les équilibres homogènes non-triviaux. Ceux-ci se caractérisent par

$$\begin{cases} \beta \delta w(t, x) - u(t, x) \left(a(u(t, x) - b)^2 + c \right) & = 0 \\ \alpha u(t, x) - \beta w(t, x) & = 0 \\ (u, w) & \neq (0, 0) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \beta \delta w &= u(a(u-b)^2 \\ \alpha u &= \beta w \\ (u, w) &\neq (0, 0) \end{cases}$$

et finalement, sachant que a et β sont des paramètres positifs du modèle, nous avons

$$\begin{cases} u &= b \pm \sqrt{\frac{\alpha\delta-c}{a}} \\ w &= u\frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

On obtient donc trois états d'équilibre, en comptant le trivial $(u, w) \equiv (0, 0)$. Nous adopterons les notations E , P_- et P_+ pour désigner ces états, avec :

$$\begin{aligned} E &: (u, w) \equiv (0, 0) \\ P_- &: (u, w) \equiv \left(b - \sqrt{\frac{\alpha\delta-c}{a}}\right) \left(1, \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ P_+ &: (u, w) \equiv \left(b + \sqrt{\frac{\alpha\delta-c}{a}}\right) \left(1, \frac{\alpha}{\beta}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Cependant, lorsque b est assez petit, l'état P_- est négatif, ce qui le rend inexistant en pratique. Dans notre étude, nous choisissons justement de nous libérer de ce point d'équilibre, en choisissant nos paramètres de manière à ce que P_- ne soit pas valide.

La question qui se pose à présent est celle de la stabilité de ces états.

3.2 Étude de la stabilité des équilibres

Afin de mettre en avant un modèle dans lequel les feux et le système déterministe s'opposent entièrement, on souhaite définir un régime de paramètre assurant l'instabilité de l'état d'extinction, ainsi que la stabilité de celui d'équilibre.

On adopte pour ce faire la méthodologie employée dans [6]. Plus exactement, on déterminera les valeurs propres de l'opérateur $A - F'(U)$. On étudiera ensuite la partie réelle de ces valeurs propres pour déterminer un critère d'instabilité de l'état d'extinction en particulier.

Ainsi, on obtiendra une séparation nette entre un processus de croissance, déterministe, et un autre de décroissance, aléatoire. Concrètement, notre travail consiste à trouver les conditions sous lesquelles au moins une des valeurs

propres de $\bar{A}$ a une partie réelle négative.

On reprend l'écriture sous forme d'un problème de Cauchy pour une équation semi-linéaire abstraite (1.4) vue dans le cadre de l'étude d'existence-unicité des solutions.

Avec les mêmes notations, la matrice F est la composante non-linéaire associée au problème, que l'on dérive avec

$$F'(U) = \begin{pmatrix} -3au^2 - 4abu & \beta\delta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

on pose

$$\bar{A} = A - F'(U) = \begin{pmatrix} M & -\beta\delta \\ -\alpha & \Lambda \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

qui correspond à la jacobienne associée au problème, avec

$$\begin{aligned} M &= ab^2 + c + 3au^2 + 4abu, \\ \Lambda &= -d\Delta + \beta. \end{aligned}$$

Toujours en suivant l'approche de [6], on peut étudier la stabilité de nos points d'équilibre par une étude du spectre $Sp(\bar{A})$. On cherche donc à résoudre le système associé de problème aux valeurs propres

$$(\lambda - \bar{A}) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

où on a $(u, w) \in L^\infty(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ et $(p, q) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Précisément, on cherche à déterminer, étant en dimension infinie,

$$Sp(\bar{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I_d - \bar{A} \text{ non inversible}\}.$$

De l'équation (3.4), il vient

$$[(\lambda - M)(\lambda - \Lambda) - \alpha\beta\delta]w = (\lambda - M)q - \alpha p. \quad (3.5)$$

Supposons $\lambda = M$. Dans ce cas, l'équation (3.5) devient

$$-\alpha\beta\delta w = -\alpha p, \quad (3.6)$$

qui n'admet pas de solution lorsque $p \in L^2(\Omega) \setminus H_N^2(\Omega)$. Autrement dit, $MI_d - \bar{A}$ n'est pas inversible. Donc, $M \in Sp(\bar{A})$, et M est un nombre réel positif. Si maintenant $\lambda \neq M$, en évaluant $(p, q) = (0, 0)$, l'équation (3.5) donne

$$\lambda \in Sp(\bar{A}) \Leftrightarrow [(\lambda - \frac{\alpha\beta\delta}{\lambda - M}) - \Lambda]w = 0, \quad (3.7)$$

ce qui équivaut à dire que $\lambda - \frac{\alpha\beta\delta}{\lambda - M}$ appartient au spectre de Λ avec condition de Neumann.

Or, ayant défini $\Lambda = -d\Delta + \beta$, on a finalement, toujours dans le cas $\lambda \neq M$,

$$\lambda \in Sp(\bar{A}) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (\lambda - d\mu_n - \beta)(\lambda - M) - \alpha\beta\delta = 0, \quad (3.8)$$

où

$$0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \rightarrow \infty$$

désignent les valeurs propres (réelles, positives et en nombre infini) de l'opérateur laplacien $-\Delta$ avec condition de Neumann. L'étude de la stabilité revient enfin à celle des racines de l'équation (3.8), plus précisément, on a obtenu le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Soit un état d'équilibre $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ du système de réaction-diffusion. On définit $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$f_n(\lambda) = (\lambda - d\mu_n - \beta)(\lambda - M(\bar{U})) - \alpha\beta\delta \quad (3.9)$$

où l'on pose $M(\bar{U}) = ab^2 + c + 3a\bar{u}^2 + 4ab\bar{u}$ et $\{\mu_n\}_{\mathbb{N}}$ le spectre de $-\Delta$ avec condition de Neumann.

L'équilibre $\bar{U}$ est stable si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : f_n(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) < 0\} = \emptyset \quad (3.10)$$

Partant de f_n telle que définie dans le lemme 3.1, et se plaçant dans le cadre d'un état d'équilibre $\bar{U}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda) = (\lambda - d\mu_n - \beta)(\lambda - M(\bar{U})) - \alpha\beta\delta. \quad (3.11)$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n,1}$ et $\lambda_{n,2}$ les deux solutions complexes de $f_n(\lambda) = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_n(\lambda) &= (\lambda_{n,1} - \lambda)(\lambda_{n,2} - \lambda) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})\lambda + \lambda_{n,1}\lambda_{n,2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

et par identification,

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} &= d\mu_n + \beta + M(\bar{U}), \\ \lambda_{n,1}\lambda_{n,2} &= \beta M(\bar{U}) - \alpha\beta\delta + d\mu_n M(\bar{U}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Puisque par positivité des paramètres $d\mu_n + \beta + M(\bar{U}) > 0$, le critère de stabilité se résume à vérifier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta M(\bar{U}) - \alpha\beta\delta + d\mu_n M(\bar{U}) < 0 \quad (3.14)$$

et montrer l'instabilité de l'état $\tilde{U}$ revient à montrer

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \beta M(\bar{U}) - \alpha\beta\delta + d\mu_n M(\bar{U}) \geq 0 \quad (3.15)$$

Après réécriture, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.2. *L'état d'équilibre E est instable dès que*

$$ab^2 + c < \alpha\delta \quad (3.16)$$

Remarque 3.3. On interprète aisément ce résultat : l'état d'extinction n'est plus attractif lorsqu'une certaine fonction des paramètres de repousse est plus grande qu'une certaine fonction des facteurs de mortalité.

On peut de plus poser la définition suivante :

Définition 3.4. On dira que l'état d'extinction est *k-instable* lorsque :

$$(\beta + d\mu_k)(ab^2 + c) < \alpha\delta, \quad (3.17)$$

où μ_k est la k^{ieme} plus petite valeur propre de l'opérateur laplacien $-\Delta$ avec condition de Neumann.

Un état *(k+1)-instable* est bien entendu *k-instable*. Cette notion de k-instabilité représente le niveau de non-attractivité de l'état d'extinction. Les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Neumann vérifiant la propriété (3.17) sont associées à des direction de diffusion ayant un aspect répulsif vis à vis de l'état d'équilibre. Une représentation très simplifiée de ce phénomène est donnée en figure 1. Au vu de la propriété (3.17), on peut plus simplement dire qu'à mesure que la mortalité baisse, le caractère répulsif de l'extinction augmente.

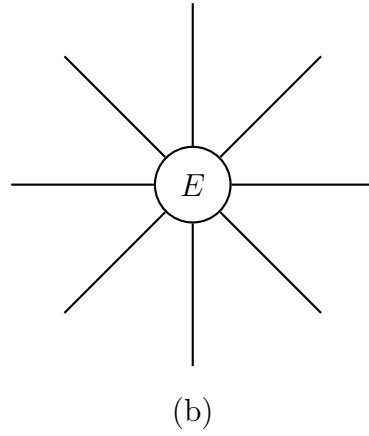
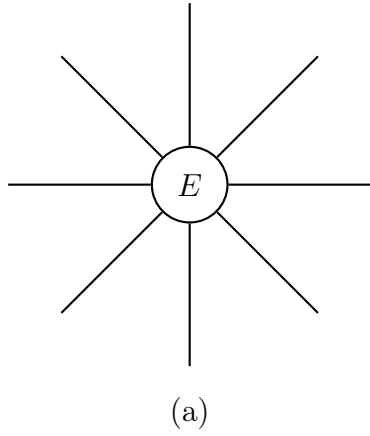


FIGURE 1 – Illustration de la notion de k -instabilité. En (a), instabilité simple, *i.e.* 0-instabilité. En (b), 2-instabilité : les trois premières valeurs propres de $-\Delta$ dirigent trois axes de répulsion.

3.3 Choix des paramètres

Nous choisissons de nous placer dans un régime de paramètres propre à rendre l'extinction instable, et la persistance stable. On utilisera pour la suite de cette étude le régime visible dans le tableau 3.

Paramètre	Valeur
<i>Paramètres biologiques</i>	
a	1
b	0.1
c	0.01
α	2
β	1
δ	0.5
<i>Dimensions et discrétisation</i>	
L	20
J	40
T	26
N	1000
<i>Paramètres liés aux feux</i>	
τ	T
r_{min}	5
r_{max}	15
I	0.7

TABLEAU 3 – Paramètres choisis pour le reste de l'étude.

Quelques précisions sur les paramètres choisis : on retrouve τ la fréquence et I l'intensité des feux, tels que décrit plus haut. r_{min} et r_{max} désignent respectivement les rayons minimal et maximal des zones d'action des feux, qui sont comme on le rappelle des disques de centre et de rayon aléatoire. En ce qui concerne le paramètre T , on développera plus loin la raison de son choix.

4 Abstraction du modèle hybride sous la forme d'une chaîne de Markov

4.1 Approche

On vient de voir l'étude de la stabilité d'un modèle d'équations aux dérivées partielles. Cependant, les méthodes employées précédemment se révèlent inefficaces dans l'étude d'un modèle hybride comme le nôtre. Cette constatation nous pousse à proposer une autre représentation du modèle, moins résistante à l'analyse. La représentation en question sera une abstraction sous forme de chaîne de Markov.

Suite à l'étude précédente, nous avons d'une part une dynamique déterministe de *croissance* (justifiée par l'instabilité de l'état d'extinction dans un régime de paramètres approprié), et d'une autre part une dynamique aléatoire de *décroissance*, due à l'apparition randomisée de feux après un temps $k\tau$.

Pour construire une chaîne de Markov, et avant tout ses états, nous définirons des boules autour des états d'équilibre. En définissant une norme, nous pourrons, à un instant donné, caractériser l'état d'une forêt comme étant plus ou moins proche de l'extinction ou de l'état de persistance. On aura donc trois états, à savoir : «la forêt est proche de l'extinction», «la forêt est proche de la persistance» et «la forêt est dans un état intermédiaire (ni l'un ni l'autre)».

Si l'on omettait l'apparition des feux, on pourrait observer l'évolution naturelle de la forêt avec un pas de temps fixé. A chaque pas de temps, on regarderait alors si la forêt est dans un des deux voisinages mentionnés plus haut -extinction, persistance - ou n'est dans aucun des deux - état intermédiaire. En réalisant ce type d'observation sur un grand nombre de trajectoire, on pourrait estimer statistiquement la probabilité de passer d'un de ces trois états à un autre après un pas de temps tel que fixé plus tôt. Afin que cette analyse statistique ne soit pas biaisée, nous devrions simuler uniformément des situations initiales aléatoires, à partir desquelles nous laisserions la forêt évoluer.

Cependant, nous devons en amont prendre en compte le tirage et l'action potentielle de feux de forêt aléatoires. Pour ce faire, nous allons enrichir le procédé décrit ci-dessus. Puisque les feux, par construction, ne peuvent se déclencher qu'après chaque pas de temps τ (voir 1.2) c'est le pas de temps que nous prendrons pour nos transitions : c'est à dire, une transition dans la chaîne représentera l'évolution de la forêt après un temps τ . Après chacun

de ces pas de temps, la chaîne passera dans un état «d'attente», à partir duquel la situation peut évoluer de deux manières différentes : ou bien aucun feu ne se déclenche, et l'on retourne immédiatement à notre fonctionnement déterministe (tel qu'expliqué jusqu'ici) ; ou bien un feu se déclenche, et l'on résout *de manière instantané* l'action de ce feu. L'action en question renvoie vers un état déterministe, comme au départ de ce procédé, et ainsi de suite.

Puisque l'apparition ou non d'un feu suit déjà une loi de Bernoulli, ce phénomène s'intègre naturellement dans la chaîne de Markov. Nous pouvons, encore une fois, adopter une approche statistique pour la valuation de cette chaîne : une première série de simulations visera à déterminer l'évolution de la forêt sur un temps τ comme décrit plus haut. Puis, on inclura les transitions liées au tirage de Bernoulli (qui a lieu au temps τ). Enfin, une seconde série de simulations en instantané - sur un seul pas de temps - permettra de déterminer les transitions dues à l'action d'un feu aléatoire sachant un tirage réussi de la loi de Bernoulli susdite.

4.2 Discrétisation

Pour définir les boules autour des états d'extinction et de persistance, nous remarquons que l'espace à normer est de dimension infinie : les solutions de l'équation de réaction-diffusion sont de la forme :

$$U = (u, w) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

Afin d'une part de simuler notre modèle, mais aussi de s'assurer l'équivalence des normes définissant les boules, nous réintroduisons une discrétisation de notre espace-temps. On utilisera dans notre cadre la méthode des différences finies avec Runge-Kutta. Rappelons ici les paramètres déjà précisés dans la section 2 :

- $L = 20$ est la taille d'un côté de l'espace de forêt (qui est un carré).
- $J = 40$ est le nombre de pas d'espace, *i.e.* $dx = L/J$.
- $T = 26$ est le temps maximal de simulation.
- $N = 1000$ est le nombre de pas de temps, *i.e.* $dt = T/N$.

4.3 Construction du modèle de Markov

4.3.1 Partie déterministe

Considérons d'abord la modélisation de la partie déterministe. Pour une norme $\|$, qui sera précisée plus tard, et un ξ fixés, on considérera trois états Σ_E , Σ_I , et Σ_P , définis par :

$$\begin{aligned}\Sigma_E &= \{(u, w) \in \mathbb{R}^{I \times J \times 2} : \|(u, w) - \tilde{E}\| < \xi\} \\ \Sigma_P &= \{(u, w) \in \mathbb{R}^{I \times J \times 2} : \|(u, w) - \tilde{P}\| < \xi\} \\ \Sigma_I &= \mathbb{R}^{I \times J \times 2} \setminus (\Sigma_E \cup \Sigma_P)\end{aligned}\tag{4.2}$$

où $\tilde{E}$ et $\tilde{P}$ désignent les équilibres discrétisés, respectivement l'extinction et la persistance.

Pour $\xi < \frac{1}{2}\|\tilde{P} - \tilde{E}\|$, on a donc une partition de $\mathbb{R}^{I \times J \times 2}$, représentant la proximité d'une forêt avec l'état d'extinction ou l'état de persistance. En joignant à ce système d'états l'évolution en temps, on obtient une dynamique de transition entres états, dépendante seulement de la dynamique déterministe du modèle réaction-diffusion, représentée par la chaîne 2.

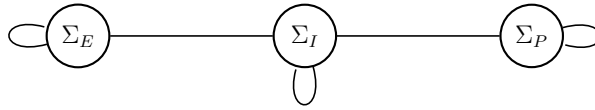


FIGURE 2 – Chaîne du processus déterministe (réaction-diffusion)

Afin de finaliser la création d'un tel modèle, il convient de fixer un *pas de temps de transition*. Pour des raisons qui apparaîtront à la section suivante, nous fixerons le pas de temps de transition à τ , c'est à dire l'intervalle minimal entre deux feux, ce qui signifie qu'une flèche du graphe représente une transition d'état après un temps τ . Notons que ce processus est pour le moment déterministe pur, et que sa dynamique est entièrement contrôlé par le modèle d'équations de réaction-diffusion. Afin de finaliser la construction d'une chaîne de Markov, on utilisera plus tard la méthode de Monte-Carlo.

4.3.2 Partie stochastique

La modélisation indépendante du processus des feux est en tout point similaire à celle du processus déterministe précédent. La différence se fait dans la signification de cette modélisation : une transition dans la chaîne en figure 3 représente l'effet pur d'un feu sur la forêt, sans participation du processus de réaction-diffusion. Cet effet est instantané dans notre modèle -

et ce depuis le début - et les passages de la chaîne, contrairement à ceux de la chaîne en figure 2, ne représentent pas un pas de temps quelconque.

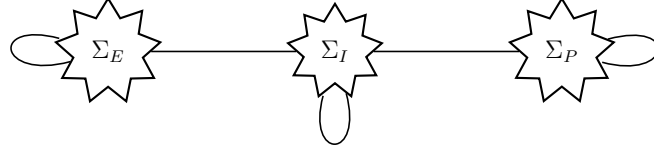


FIGURE 3 – Chaîne du processus stochastique (feux aléatoires)

4.3.3 Couplage des deux modèles

On cherche ici à coupler les deux chaînes précédentes, afin de représenter sous la forme d'une troisième chaîne leur exécution alternée. Pour ce faire, on réfléchit de la manière suivante : partant de l'instant $t = 0$, la forêt évolue sans occurrence de feu pendant un temps τ , par définition de τ . Après ce pas de temps, la forêt est dans un certain état - c'est à dire soit dans un voisinage d'un équilibre soit dans la zone intermédiaire. A cet instant, on résout un tirage de loi de Bernoulli pour déterminer l'apparition d'un feu. Si le feu a lieu, une dynamique différente de celle de la forêt prend le relais et provoque potentiellement un changement d'état.

Pour reformuler de manière systématique :

- À un instant donné T , la dynamique déterministe régule le passage d'un état à un autre, observé au temps $T + \tau$.
- Au temps $T + \tau$, un tirage d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ détermine si un feu a lieu.
- Si le tirage échoue, la situation est inchangée, l'état reste le même.
- Si le tirage réussit, une règle - déterministe - contrôle l'état suivant.
- Jusqu'au temps $T + 2\tau$, c'est à nouveau la dynamique déterministe qui contrôle les transitions.

Dès lors, nous considérons la chaîne **A1** (figure 4), partiellement évaluée.

Dans cette chaîne, on définit :

- E_d : la forêt est dans le voisinage de l'extinction, à un instant sans comportement aléatoire - formellement, à un instant $t \notin \tau\mathbb{N}$;
- E_b : la forêt est dans le voisinage de l'extinction, à un instant de tirage aléatoire pour déterminer si un feu se déclenche - l'état est celui de la forêt *avant* le feu ;
- E_f : un feu a eu lieu à l'instant donné - la forêt est dans le voisinage de l'extinction *après* l'action du feu ;

et on fait de même pour les états Σ_I et Σ_P

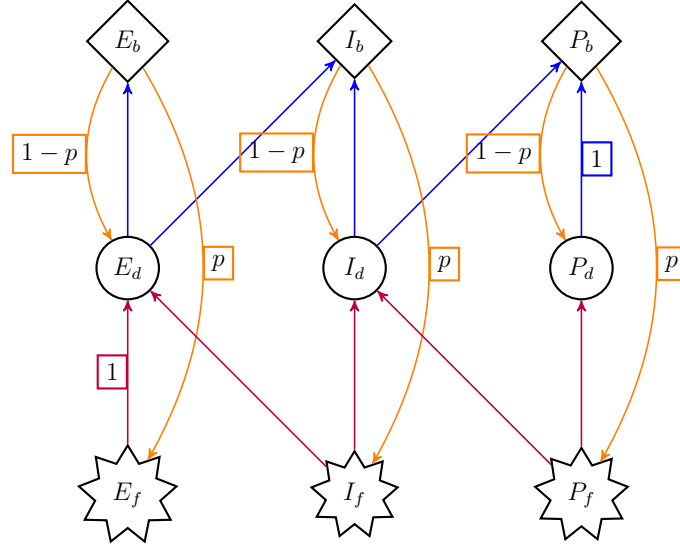


FIGURE 4 – **Chaîne A1** : Abstraction du modèle de Markov couplé non uniforme en temps

La chaîne **A1** vient intercaler le processus de feux entre deux transitions déterministes (autrement dit, entre deux pas de temps de transition $k\tau$ et $(k+1)\tau$). Il convient de noter que les transitions du graphe sont à présent irrégulière en temps : les transitions des états $X_d \rightarrow Y_b$ sont observées sur un temps τ , tandis que les transitions $X_b \rightarrow Y_f$ et $X_f \rightarrow Y_d$ sont instantanées. De plus, les différents types de transitions obéissent à des dynamiques différentes (réaction-diffusion, loi de Bernoulli, règle explicite de destruction dans un sous-domaine aléatoire). Nous allons chercher à nous émanciper totalement des dynamiques non-probabilistes, en utilisant la méthode de Monte-Carlo, après avoir généré des situations initiales uniformément dans les états Σ_E , Σ_I et Σ_P .

La loi de Bernoulli donne déjà quelques unes des probabilités de passage. Nous postulons également qu'un feu dans l'état Σ_E ne peut que laisser la forêt dans l'état Σ_E , et que par stabilité et pour un choix correct de ξ , le processus de réaction-diffusion ne fait pas sortir de l'état Σ_P (hypothèse de stabilité). Il nous reste donc un total de huit probabilités de passage à estimer.

4.4 Estimation des probabilités de transition du modèle couplé

On effectue des simulations numériques pour estimer les paramètres de transition de la chaîne de Markov.

4.4.1 Choix d'une norme

On prendra pour norme la fonction

$$\|(a_{i,j})_{i,j \in J}\| = \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J |a_{i,j}| \quad (4.3)$$

qui représente effectivement la somme des densités en arbres et graines sur l'ensemble de la forêt, et par proportionnalité dans le cadre d'un découpage régulier de l'espace, le nombre d'arbres dans la forêt à un facteur près.

Pour simuler dans les boules de persistance et d'extinction, on utilise une méthode de tirage uniforme dans la boule, qui consiste à tirer un vecteur uniformément distribué coordonnée par coordonnée, à le normaliser, puis à le multiplier par un scalaire uniformément aléatoire dans l'intervalle $[0, \xi]$.

La simulation dans l'état intermédiaire se fait par la même méthode centrée en l'extinction, avec un facteur uniformément tiré dans $[0, \|P_+\| + \xi]$, suivie d'un rejet des générations incluses dans l'une des deux boules d'extinction ou de persistance.

Remarque 4.1. Un premier choix était d'utiliser la norme $\|(a_{i,j})_{i,j \in J^2}\|_* = \max(|a_{i,j}|)$. Ce choix présentait plusieurs problèmes :

- Bien que ce choix convienne pour l'étude depuis la persistance et l'extinction, il ne met pas en lumière de bon comportement pour les trajectoires partant de l'état intermédiaire. En effet, en générant uniformément chaque point de la forêt dans cet état, la probabilité d'être à une distance maximale de l'extinction correspond exactement à la probabilité de tirer une valeur maximale de la loi uniforme parmi les $J \times J$ tirages, probabilité qui grandit quadratiquement avec la valeur de J . Le même phénomène s'observe symétriquement avec la distance à la persistance, et on a ainsi une probabilité largement réduite d'observer des trajectoires échappant à l'état intermédiaire.
- Pour une raison similaire, l'action des feux sur la norme $\|\cdot\|_*$ est limitée. Si le point de plus forte densité reste intact après le feu, la distance à l'extinction reste inchangée, ce qui ne représente pas correctement l'évolution de la forêt.

4.4.2 Choix de T et ξ

On fixera les boules autour de la persistance et de l'extinction avec un rayon identique, à savoir $\xi = 1000$, et les transitions déterministes sont estimées sur un horizon $T = 26$.

Remarque 4.2. Il convient de comprendre que dans le cadre de la modélisation en chaîne de Markov, les choix de paramètres sont laissés entièrement à notre discrétion, et aucune justification précédente ne vient avantager un choix sur un autre. Notre objectif est de capturer le maximum d'information sur le processus hybride, qui de toute manière ne pourra être entièrement contenu dans la chaîne le représentant. C'est donc empiriquement, et avec cette notion de maximum d'information, c'est à dire d'évolution, que l'on aborde les choix suivant.

En ce qui concerne le paramètre $T = 26$, son choix est empirique. Notons d'abord que dans le cas de simulations visant à déterminer les transitions déterministes de la chaîne, $T = \tau$. En effet, T désigne le temps de simulation, et on souhaite exactement simuler le comportement du modèle entre deux feux, soit sur un temps τ . Entièrement libres dans nos choix, on aimerait naturellement utiliser le T le plus petit possible : le processus de réaction-diffusion étant en temps continu, chaque transition de la chaîne de Markov «déterministe» représente un pas de temps T , donc un pas de temps dans la discrétisation induite sur le processus de réaction-diffusion. Minimiser ce pas de temps revient donc à minimiser la perte d'information due à cette discrétisation. Cependant, un choix de T trop petit ne permet pas au processus de réaction-diffusion de faire transiter la forêt d'un état à un autre avec une assez grande probabilité. Face à ce problème, plusieurs «solutions» se présentent : ajouter des états intermédiaires capturant les changements d'état plus finement, simuler un plus grand nombre de trajectoires pour maximiser la probabilité d'obtenir une transition donnée, ou finalement repousser l'horizon pour observer des transitions fréquemment. Nous avons fait le dernier choix, en croisant empiriquement les trajectoires sortant de l'extinction et de la persistance, pour en venir à $T = 26$ qui permet de capturer un nombre de transitions convenable.

Le choix du rayon de boule $\xi = 1000$ est fait de la même manière : il permet de capturer de nombreuses transitions en un temps T choisi. Les choix de T et ξ sont donc fait conjointement, par essai-erreur. Nous n'avons pas étudié de méthode mathématique permettant de définir ces paramètres *a priori*.

Nous tracerons par la suite les distances au centre de la boule de chaque simulation au cours du temps, partant de situations générées uniformément

aléatoirement de la manière définie plus tôt, et ce pour chaque boule et pour l'état intermédiaire. On signale par une ligne pointillée la distance seuil à partir de laquelle la trajectoire quitte la boule concernée (soit la distance ξ au centre).

4.4.3 Résultats des simulations

On obtient après un calcul normalisé du nombre de trajectoire sortant de - ou restant dans - leur état de départ la chaîne de Markov **A2** (figure 5). Pour améliorer la lisibilité, on s'est permis de représenter les transitions Bernouilli-Feux et Bernouilli-Déterministe, identiques pour chaque état sur une même ligne, par des flèches autour du graphe.

Les graphiques des distances des simulations sont visibles sur les figures 11 et 10.

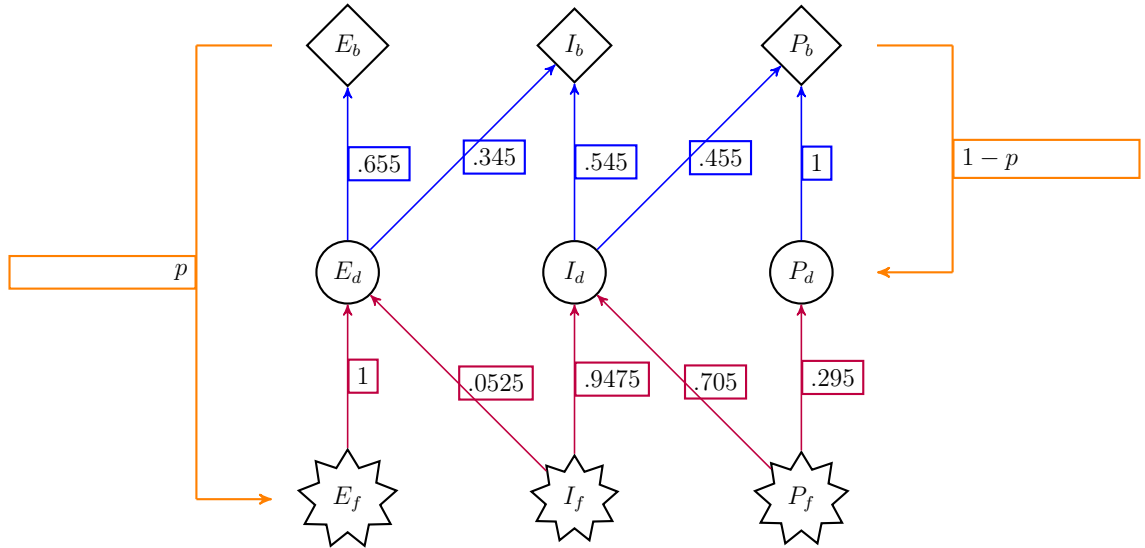


FIGURE 5 – **Chaîne A2** : non uniforme en temps avec valeurs des probabilité de transition

4.5 Réécriture uniforme en temps de la chaîne

Remarque 4.3. La chaîne **A2** n'est pas uniforme en temps : certaines transitions sont instantanées, tandis que d'autres se déroulent sur un temps réel τ . Afin de faciliter les calculs à venir, qui impliqueront d'une part une dépendance en p et d'autre part un critère de temps maximal d'oscillation, on se propose une réécriture de la chaîne.

Nous pouvons réécrire la chaîne présentée en figure 5 sous une forme uniforme en temps, dans laquelle l'influence de p est contenue directement dans les transitions. Pour obtenir cette réécriture, nous avons considéré les chemins partant d'un état précédant une transition déterministe (E_d , I_d et P_d) et revenant à un état précédant une transition déterministe. Par la nature de la chaîne, l'ensemble de ces trajectoires couvre l'entièreté des passages possibles sur un temps τ , en supposant comme c'est le cas dans nos simulations que toute trajectoire débute sur un état X_d .

Exemple 4.4. Pour calculer la probabilité de rester en P après un temps τ , on énumère les trajets possibles partant de P_d et ayant pour prochain état déterministe P_d .

Désignons par $X \xrightarrow{\tau} Y$ tous les chemins de la chaîne menant de X à Y en un temps τ . On notera $X_1X_2...X_k$ un chemin explicite partant de X_1 , passant de X_1 à X_2 , et ainsi de suite.

Nous avons

$$P_d \xrightarrow{\tau} P_d = \{P_dP_bP_fP_d, \quad P_dP_bP_d\},$$

et finalement, la probabilité de retourner à l'état de persistance après un pas de temps τ n'est autre que la somme des probabilité de réalisation des chemins de $P_d \xrightarrow{\tau} P_d$, c'est à dire

$$\mathbb{P}(P_dP_bP_fP_d) = 1.p.0,295,$$

$$\mathbb{P}(P_dP_bP_d) = 1.(1-p),$$

$$\begin{aligned} \implies \mathbf{P}_{PP} &= 1.p.0,295 + 1.(1-p) \\ &= 1 - 0,705p. \end{aligned}$$

On obtient alors par la méthode proposée la chaîne **A3** (figure 6), uniforme en temps et dont les transitions dépendent de p . Nous précisons que les valeurs décimales présentées sont des approximations.

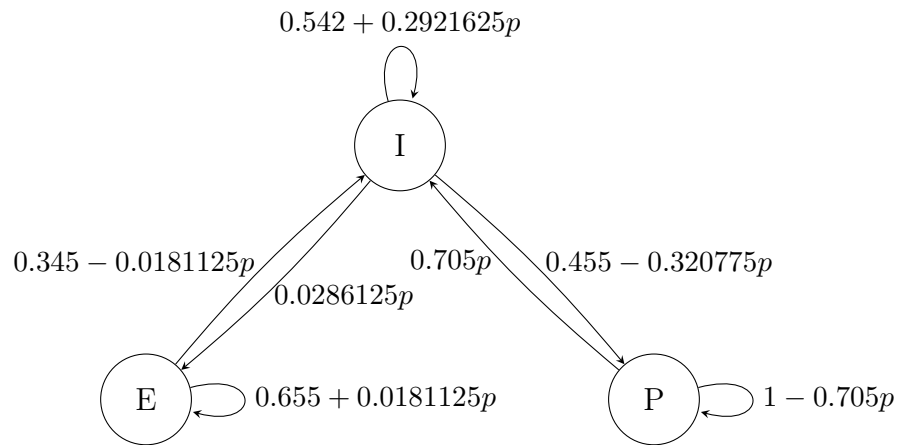


FIGURE 6 – **Chaîne A3** : à trois états avec transitions uniformes en temps, dépendantes de p .

5 Étude d’une propriété émergente sur la chaîne de Markov

On se propose dans cette section d’étudier une propriété d’oscillation sur la chaîne de Markov **A3**.

5.1 Définition de la propriété d’oscillation

On s’intéresse à une propriété d’oscillation, qui s’exprime informellement par : «il existe des trajectoires passant indéfiniment de l’extinction à la persistance, et vice-versa.» Autrement dit, certaines trajectoires ne sont jamais absorbées par la persistance, et suffisamment pour qu’elles retournent indéfiniment à l’extinction.

Il est naturel, en observant la chaîne **A3** en figure 6, que la probabilité pour une telle trajectoire de se réaliser n’est jamais nulle, et cela par irréductibilité de la chaîne. On peut cependant s’interroger sur la valeur de cette probabilité en fonction de celle des feux, notée jusqu’ici p .

Remarque 5.1. On rappelle qu’une chaîne de Markov est irréductible si pour tout couple d’état, la probabilité de transition de l’un à l’autre est non nulle, c’est à dire que chaque état est, à terme, atteignable depuis n’importe quel autre. Formellement :

$$\forall x, y \in E, \quad \mathbf{P}(x, y) > 0$$

Nous ajoutons alors une contrainte à cette propriété d’oscillation, à savoir que le passage d’un état extrême à un autre (de E à P et inversement) doit se produire en un temps maximal $M\tau$. Cette contrainte, en plus de spécifier la rapidité d’une oscillation, permet un calcul algorithmique de la probabilité, qui viendra plus bas.

L’ajout de cette contrainte, à son tour, rend triviale la propriété énoncée plus haut : la probabilité d’osciller indéfiniment en un temps contraint tel que proposé est naturellement nulle, puisque la probabilité de rester, à un moment donné, dans un état extrême pendant un temps plus long que M n’est pas nulle. Autrement dit, toute trajectoire à l’infini admet presque sûrement un temps d’arrêt plus long que M dans un état extrême, et donc n’oscille pas indéfiniment.

Dès lors, nous révisons encore notre propriété, en se proposant de fixer un nombre d’oscillations minimal à atteindre, noté par la suite K .

On peut à présent donner une écriture plus formelle de notre propriété, inspirée librement du langage PCTL (pour *Probabilistic Computation Tree*

Logic). On se contente ici de décrire brièvement quelques notations utilisées dans notre cas : pour en apprendre plus sur le langage PCTL à proprement parler, nous renvoyons au très complet [2].

Soit ω une trajectoire de la chaîne de Markov (c'est-à-dire une suite de réalisation d'états). Soit $\mathcal{P}$ une propriété, et on note $\omega \models \mathcal{P}$ lorsque ω vérifie la propriété $\mathcal{P}$. On explicite ici quelques notations et concepts, de manière intuitive seulement. Nous noterons :

- $\omega \models P \vee I$: la trajectoire commence par P ou I .
- $\omega \models \Diamond P$: la trajectoire atteint *éventuellement* l'état P .
- $\omega \models \Diamond^{\leq M} P$: la trajectoire atteint éventuellement P en moins de M étapes
- $\omega \models E \wedge (\Diamond^{\leq M} P)$: la trajectoire commence par E , puis la trajectoire atteint éventuellement P en moins de M étapes.

Avec ce langage à l'esprit notre propriété doit traduire qu'éventuellement, on atteint l'état E , puis, moins de M étapes plus loin, l'état P , puis, moins de M étapes plus loin, l'état E , et ainsi de suite au moins K fois ; ou bien on réalise la même propriété, mais en commençant l'oscillation par l'état P . On écrit alors la définition suivante :

Définition 5.2. En fixant τM le temps maximal avant le passage d'un état extrême à son opposé et K le nombre d'oscillations minimal à atteindre, on pose la propriété d'oscillation

$$\Diamond \left[\left(E \wedge \left(\Diamond^{\leq M} P \wedge \underbrace{(\Diamond^{\leq M} E)}_{K-1 \text{ fois}} \right) \right) \vee \left(P \wedge \left(\Diamond^{\leq M} E \wedge \underbrace{(\Diamond^{\leq M} P)}_{K-1 \text{ fois}} \right) \right) \right] \quad (5.1)$$

5.2 Expression de la probabilité d'osciller

A partir de la chaîne **A3** (figure 6), il s'agit de déterminer les trajectoires vérifiant la propriété (5.1). Dans un premier temps, on peut exprimer les trajectoires comme des mots construits sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{E, I, P\}$. Remarquons ici quelques propriétés des mots associés aux passages possibles de E à P en un temps plus petit ou égal à M . Par abus de langage, on confondra le mot et sa trajectoire associée dans les discussion suivantes.

Tout mot licite menant de E à P

- finit nécessairement par le suffixe IP ,
- commence nécessairement par le préfixe E ,
- ne contient pas P entre son préfixe et son suffixe.

Avec ces règles, on a caractérisé les mots représentant des trajectoires menant de E à P .

Remarque 5.3. Considérant le mot respectant ces règles $EIEIIIP$, on dénombre 6 transitions pour 7 lettres, et 4 de ces lettres appartiennent au mot central. Nous comprenons par l'exemple que pour M transitions, le mot correspondant doit contenir $M + 1$ lettres, et sa partie centrale en contenir $M + 1 - 3 = M - 2$.

Étant donné notre borne de temps maximal M , énumérer les mots menant de E à P en au plus τM temps revient donc à énumérer l'ensemble des mots centraux possibles, c'est à dire à énumérer l'ensemble des mots construits sur $\{E, I\}$ de $M - 2$ lettres ou moins.

Après énumération de ces mots, il suffit de calculer la probabilité associée à leur transition respective, et d'additionner ces probabilités pour obtenir la probabilité de passer de E à P en au plus τM temps. Cette probabilité dépendra naturellement de p .

Une transition en un nombre d'états $m \leq M$ aura pour probabilité le produit de m probabilités de transition, toutes polynôme de degré exactement 1 en p , et donc sera un polynôme de degré exactement m en p . En sommant les transitions de tous les mots sur un nombre d'états plus petit ou égal ou égal à M , nous obtiendrons finalement un polynôme de degré M en p , noté par la suite $\mathcal{Q}_M(p)$.

Une étude en tout point similaire sur les trajectoires menant de P à E en moins de τM temps donne un autre polynôme représentant la probabilité d'obtenir une telle trajectoire, de degré M également, et noté $\mathcal{R}_M(p)$.

Finalement la probabilité d'obtenir *au moins* K oscillations n'est autre que

$$\mathbf{P}(O_K) = (\mathcal{R}_M(p) \times \mathcal{Q}_M(p))^K = \mathcal{S}_M(p)^K,$$

qui est un polynôme de degré $2M + K$.

Remarque 5.4. Notons que, avec cette méthode, nous permettons n'importe quel comportement avant oscillation. Plus précisément, une trajectoire «contenant» un mot représentant un comportement oscillatoire dispose d'un temps illimité pour atteindre cette période d'oscillation. Il n'est pas nécessaire, en l'occurrence, que l'oscillation débute à la première atteinte d'un état extrême.

5.3 Calcul de la probabilité d'osciller

Suite à la discussion précédente, on fixe $M \in \{3, 10, 20\}$, de manière arbitraire. Remarquons que l'exploration des mots de longueur au plus $M-2$ sur un alphabet à deux lettres implique une complexité temporelle $\mathcal{O}(2^M)$. Autrement dit, le choix d'un M relativement petit est le bienvenu.

On calcule d'abord symboliquement $\mathcal{S}_M(p)$ avec la méthode expliquée dans la section précédente. Par exemple, on obtient pour $M = 10$ un polynôme de degré $2 \times 10 = 20$, dont l'expression complète est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_M(p) = & 0.3278252572714551 p^2 - 0.2477269335455377 p^3 \\ & + 0.08181104741093925 p^4 - 0.053785479636493556 p^5 \\ & + 0.009038242047774248 p^6 - 0.0050444858579593785 p^7 \\ & + 0.0007092891160540909 p^8 - 9.064373058053108\text{e-}05 p^9 \\ & + 6.673670842608608\text{e-}06 p^{10} - 5.275131276611618\text{e-}07 p^{11} \\ & + 1.9215908715833215\text{e-}07 p^{12} + 4.682761308257322\text{e-}08 p^{13} \\ & - 3.3267130912294564\text{e-}08 p^{14} - 6.134181998505873\text{e-}09 p^{15} \\ & + 3.416091381184202\text{e-}09 p^{16} + 6.169025744110023\text{e-}10 p^{17} \\ & - 1.776656591930693\text{e-}10 p^{18} - 3.0038889424575445\text{e-}11 p^{19} \\ & + 1.9545948335852615\text{e-}12 p^{20} \end{aligned}$$

Ce polynôme est alors la probabilité de partir d'un état non-intermédiaire et d'y revenir en un temps plus petit ou égal à $2\tau M$. Pour obtenir la probabilité d'osciller K fois, il suffit de porter ce polynôme à la puissance K . Afin de tester la probabilité d'obtenir un certain nombre d'oscillations, on a porté le polynôme $\mathcal{S}_M(p)$ à différentes puissances, avant de l'évaluer sur les valeurs possibles de p , à savoir $[0, 1]$. Les graphiques correspondants sont en figure 7.

On travaille de la même manière avec $M = 3$ et $M = 20$, pour obtenir respectivement les graphiques 8 et 9.

Remarque 5.5. A titre d'exemple, on doit comprendre le deuxième graphique de la figure 8 de la manière suivante : c'est la probabilité, en fonction de p , d'osciller au moins 10 fois, sachant que le temps maximal autorisé pour passer d'un état à son opposé est 3τ - si ce temps est dépassé, on considère que la trajectoire a arrêté d'osciller.

Remarque 5.6. En augmentant le nombre d'oscillation K et la valeur de M , on augmente le degré du polynôme $\mathcal{S}_M(p)$ qui, on le rappelle, est de degré $2M + K$. La multiplication répétée de $\mathcal{S}_M(p)$ provoque à terme des erreurs

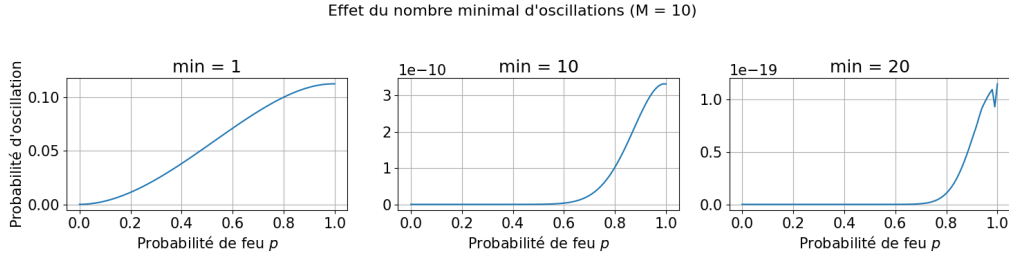


FIGURE 7 – Probabilité d'oscillation en fonction de p et du nombre d'oscillations minimum requises min ; $M=10$.

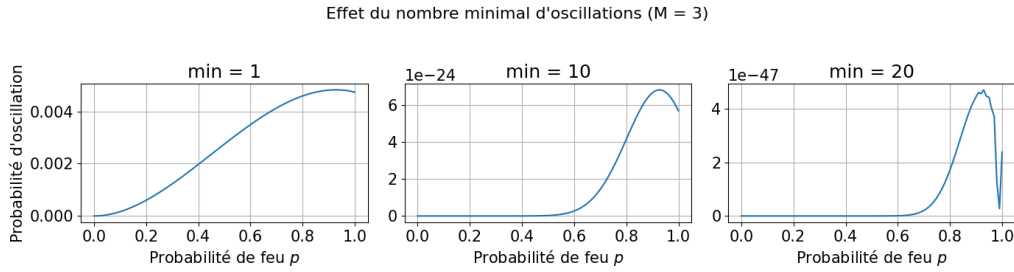


FIGURE 8 – Probabilité d'oscillation en fonction de p et du nombre d'oscillations minimum requises min ; $M=3$.

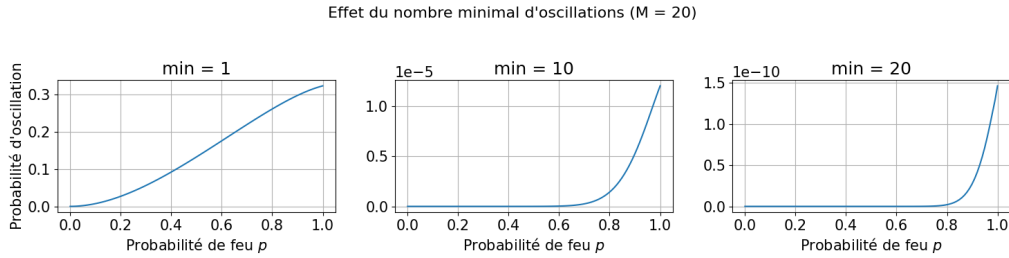


FIGURE 9 – Probabilité d'oscillation en fonction de p et du nombre d'oscillations minimum requises min ; $M=20$.

d'arrondis dues aux limitations physiques de notre ordinateur : le nombre de décimales croît et provoque des erreurs de précision flottante. Nous avons ici choisi de montrer les graphiques en entier, mais il convient d'ignorer les valeurs aberrantes apparaissant notamment à l'extrême droite des courbes, et particulièrement dans les cas où K est grand, puisque K est exposant dans les calculs.

5.4 Interprétation

On propose ici une interprétation des résultats de la section précédente.

Pour tout choix de M , la probabilité de vérifier la propriété baisse avec l'augmentation du nombre minimal d'oscillations demandé. Pour tout choix de nombre minimal d'oscillations, augmenter M augmente la probabilité de vérifier la propriété, en laissant à la trajectoire plus de temps pour osciller.

La croissance des courbes est due à l'attractivité de l'état de persistance. En effet, on a déjà mentionné que sans action des feux, l'état de persistance est stable, ce qui empêche l'oscillation. Il est naturel que, plus les feux sont fréquents, plus leur dynamique participe à libérer les trajectoires du caractère attractif de la persistance.

Notons en particulier que dans le cas $M = 3$, on observe un point d'inflexion de la courbe pour p assez grand. Ce phénomène dévoile qu'à partir d'une certaine probabilité de feu, l'état d'extinction gagne suffisamment en attractivité pour inverser la tendance prévalente jusque là : à gauche de ce point d'inflexion, les trajectoires peinent à osciller à cause de l'attractivité de la persistance, tandis qu'à droite de ce point, cette difficulté vient de l'attractivité de l'état d'extinction.

Cependant, pour un M plus grand, ce phénomène s'estompe. Même avec une probabilité $p = 1$ (c'est-à-dire, exactement un feu tous les τ temps) l'extinction ne devient pas assez attractive pour significativement retenir les trajectoires à l'extinction durant un temps $M\tau$.

On peut finalement considérer que les dynamiques de feux en action ne permettent pas de faire osciller le modèle significativement, résultat cohérent dans une certaine mesure avec ceux de [4].

6 Discussion

Dans ce rapport, nous avons mené l'étude d'un modèle connu d'évolution de forêt. Ce modèle déterministe, basé sur des équations aux dérivées partielles, à été augmenté d'une composante stochastique pour en faire un modèle hybride à même de représenter l'action de phénomènes extrêmes et aléatoires sur les forêts. Dans un second temps, nous avons proposé une modélisation purement probabiliste destinée à représenter le premier modèle par une chaîne de Markov. On a finalement utilisé cette dernière représentation markovienne pour étudier des propriétés émergentes.

Portons l'attention sur le caractère approximatif de notre procédé. D'une part, la construction de notre chaîne est basée sur des simulations numériques du modèle à équations, simulations qui induisent nécessairement des erreurs d'approximation de par leur caractère discrétisant. De plus, de nombreux choix ont été fait lors de la construction de la chaîne de Markov associée au modèle. Ces choix, pour la plupart, sont expérimentaux au mieux.

Finalement, ce caractère approximatif traduit un compromis entre simplicité et exactitude, les méthodes employées ici ayant avant tout pour but de proposer une simplification d'un modèle complexe.

L'intérêt de ce travail réside donc dans une simplification d'un modèle hybride par une approche probabiliste, simplification permettant l'étude de propriétés autrement compliquées à déterminer. Il convient de noter que le cadre dans lequel ce travail est réalisé s'est voulu simple : modèle à deux équations, un seul paramètre d'aléa, seulement trois états de Markov pour représenter un phénomène complexe, choix de paramètres destiné à mettre en valeur certains comportements. On pourra se questionner sur les limites et potentiels de cette méthode appliquée à d'autres modèles plus contraignants, et pour lesquels les paramètres seraient déterminés par des données réelles. De manière générale, il serait intéressant de donner un fondement mathématique aux choix pris tout au long de ce rapport, en s'intéressant de près à la fidélité du modèle de Markov par rapport au modèle à équations.

Notons quelques perspectives :

- Notre étude de propriété émergente n'a pas utilisé de techniques de *model-checking* : un prolongement naturel de ce travail consisterait à poser notre propriété en véritable PCTL, puis à utiliser des outils classiques (par exemple **STORM**) pour la vérifier. Le polynôme $\mathcal{S}_M$ serait ainsi généré automatiquement, sans travail « à la main ». Notons cependant que notre méthode ici employée garanti toujours un nombre de simulations très réduit par rapport à une étude du modèle brut sans abstraction.

- Une piste évidente serait d'étudier la présence de la propriété émergente dans le cadre du modèle à équations. C'est à dire, effectuer des simulations et, sans passer par la chaîne de Markov, étudier statistiquement la probabilité d'osciller. On pourrait ainsi estimer si la propriété, et même la probabilité qu'elle soit vérifiée, provient bien du modèle, et pas seulement de la modélisation en chaîne de Markov.
- De manière réciproque, on peut s'attacher à déterminer à quel point le modèle de Markov conserve l'information du modèle à équations. Nous mentionnons plus haut un compromis entre simplicité et exactitude. Ce compromis admet *a priori* un point de contrôle simple : nous n'avons utilisé que trois états (extinction, intermédiaire et persistance) dans notre étude, mais ajouter d'autres états améliorerait sans doute la fiabilité du modèle markovien, au prix de sa simplicité. Particulièrement dans le cadre de l'étude de la propriété d'oscillation, le nombre d'états est étroitement relié à la complexité algorithmique (voir [5.3](#)).
- Prolongeons la remarque précédente : on pressent qu'en augmentant - théoriquement - à l'infini le nombre d'états, on reviendrait à la précision d'une simple estimation par Monte-Carlo. Dans un sens, considérant les trois étapes de discrétisation - simulation numérique, Monte-Carlo, chaîne de Markov - dont dépend l'incertitude de notre étude, celles-ci viennent chacune discrétiser la précédente. Le passage de la première à la deuxième discrétisation est déjà étudié ; celui de la deuxième à la dernière reste à explorer.

A Annexes

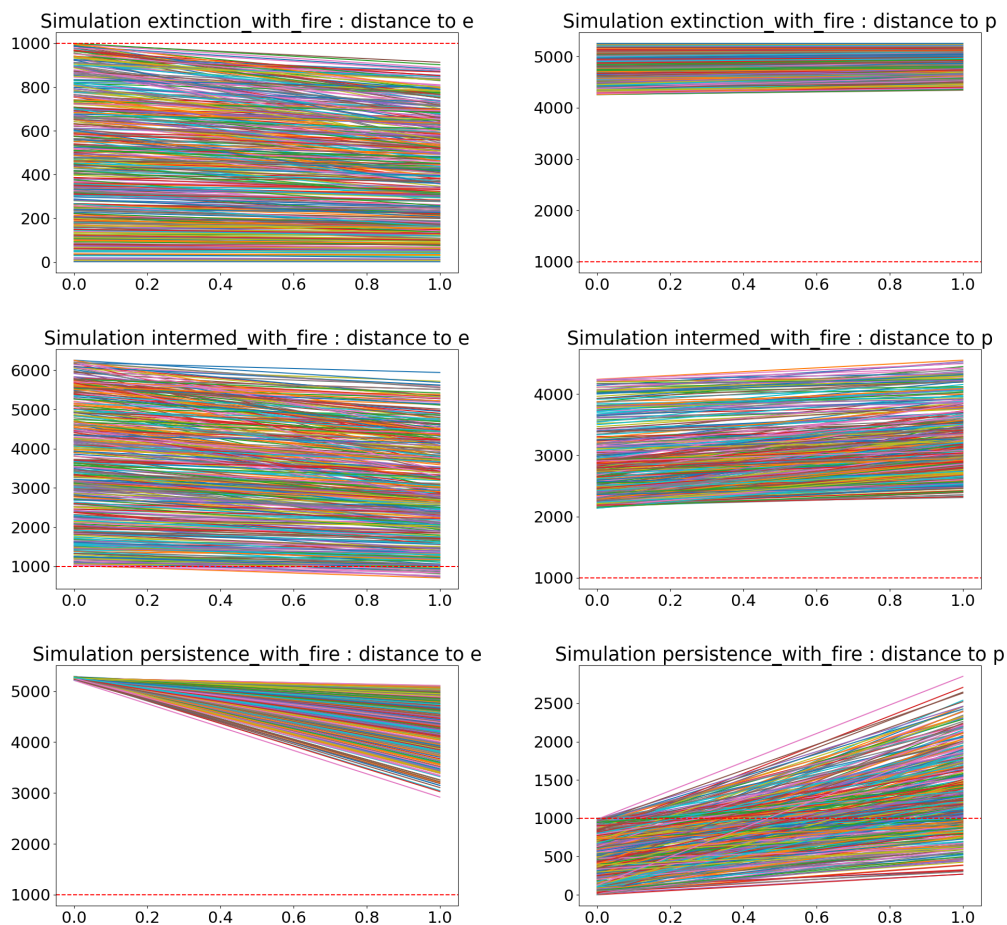


FIGURE 10 – Simulations du processus stochastique instantané pour les trois situations initiales : distances à l'extinction et à la persistance après un feu aléatoire

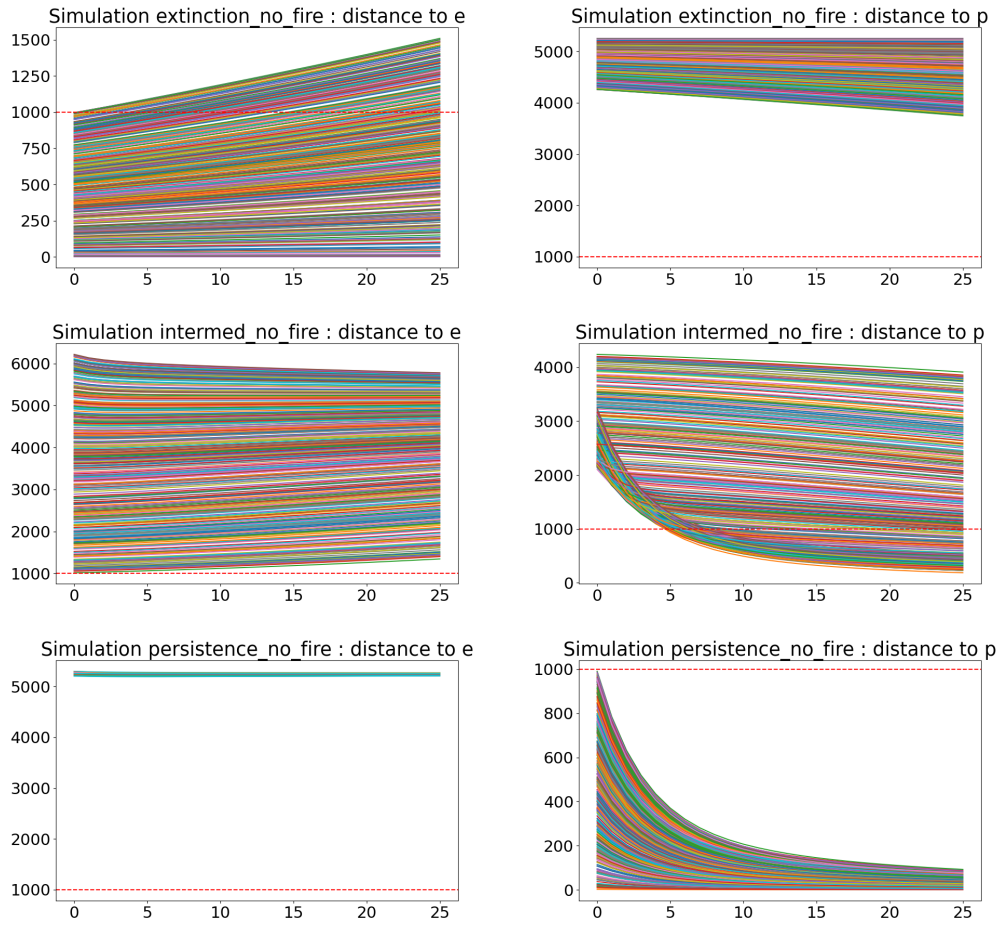
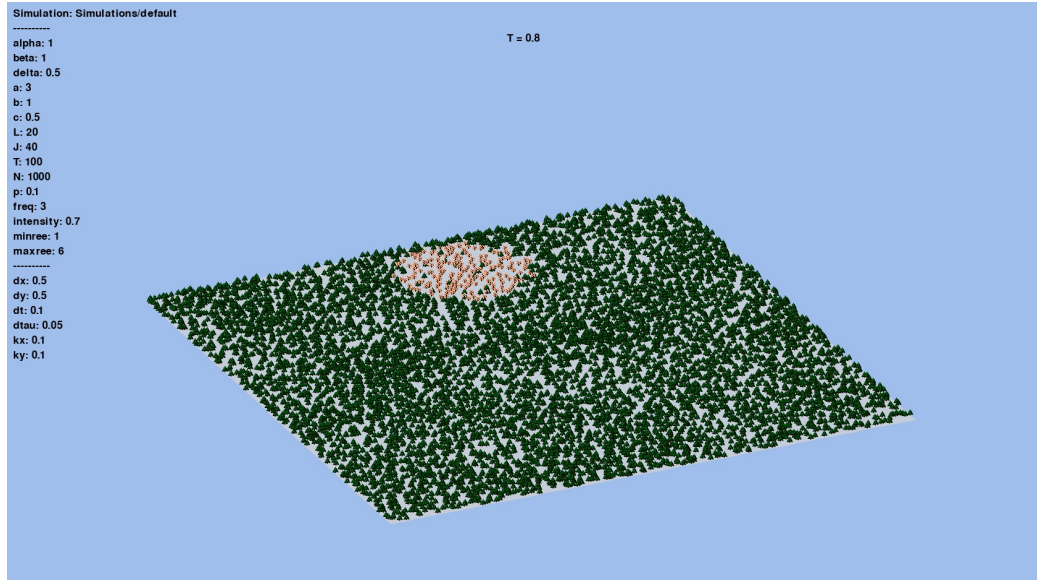


FIGURE 11 – Simulations du processus déterministe sur un temps τ pour les trois situations initiales : distances à l’extinction et à la persistance en fonction du temps



(a) Action d'un feu



(b) Visualisation d'écotones

FIGURE 12 – Images tirées de la visualisation du modèle à deux équations avec méthode des différences finies et Runge-Kutta.

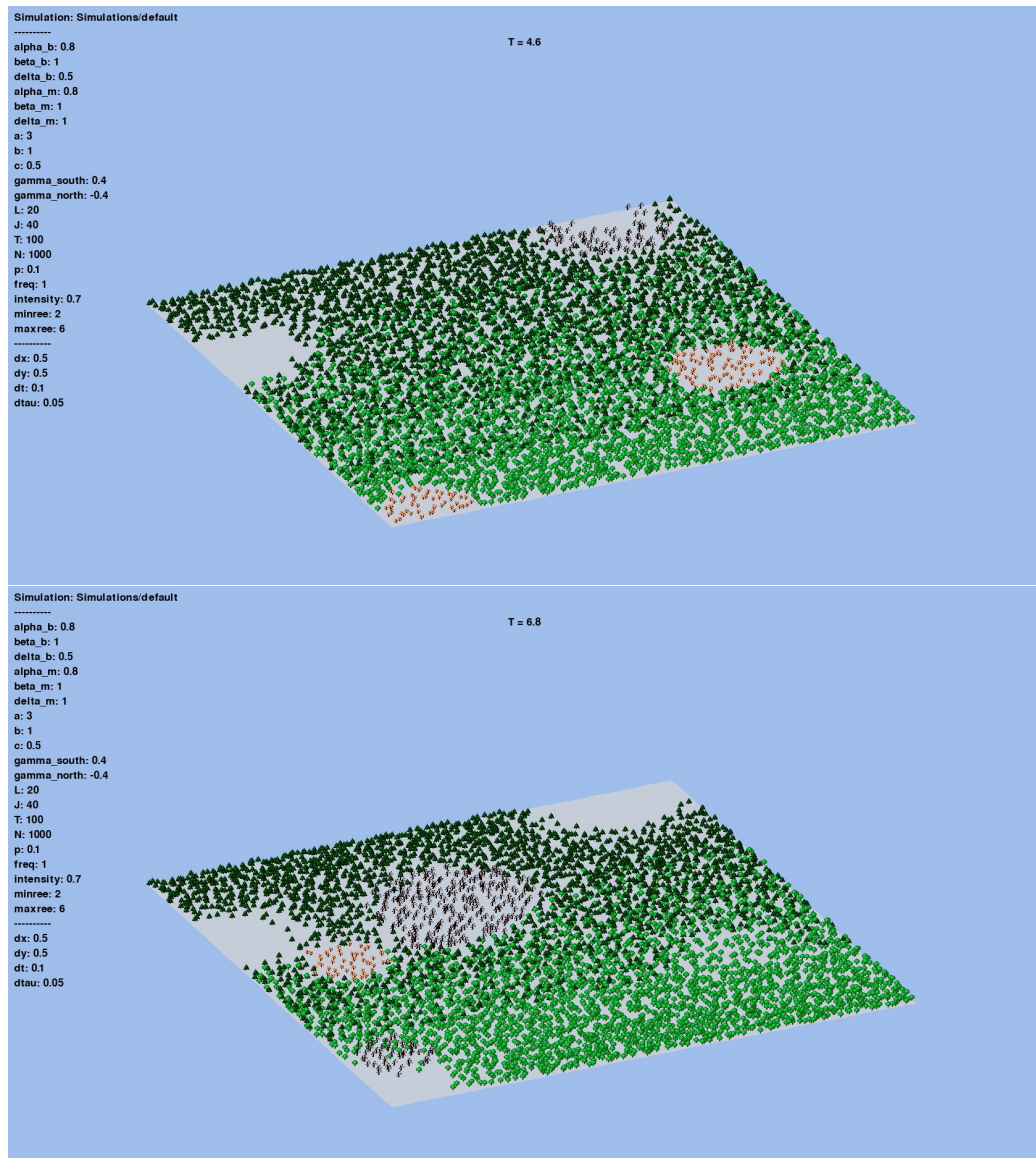
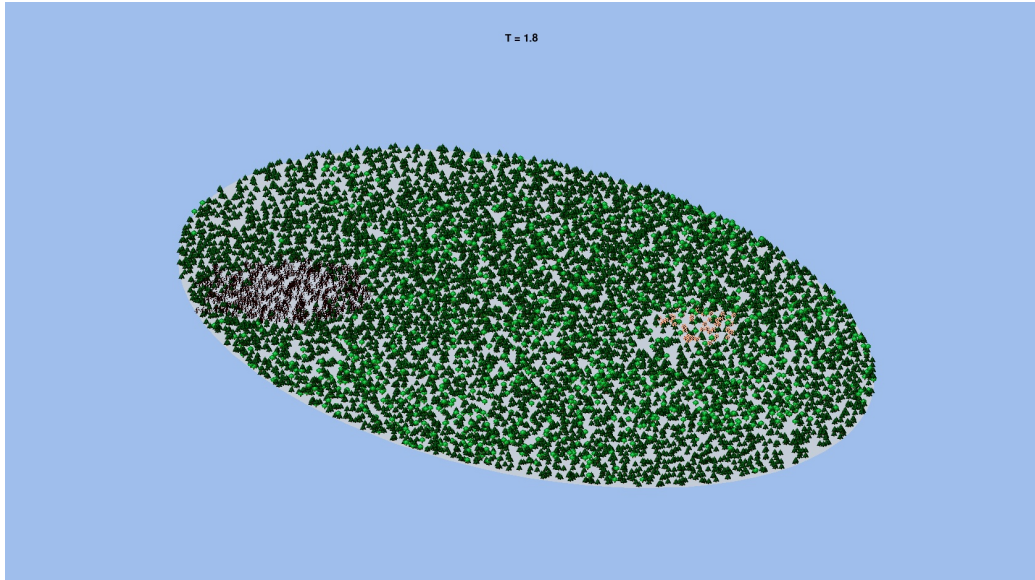
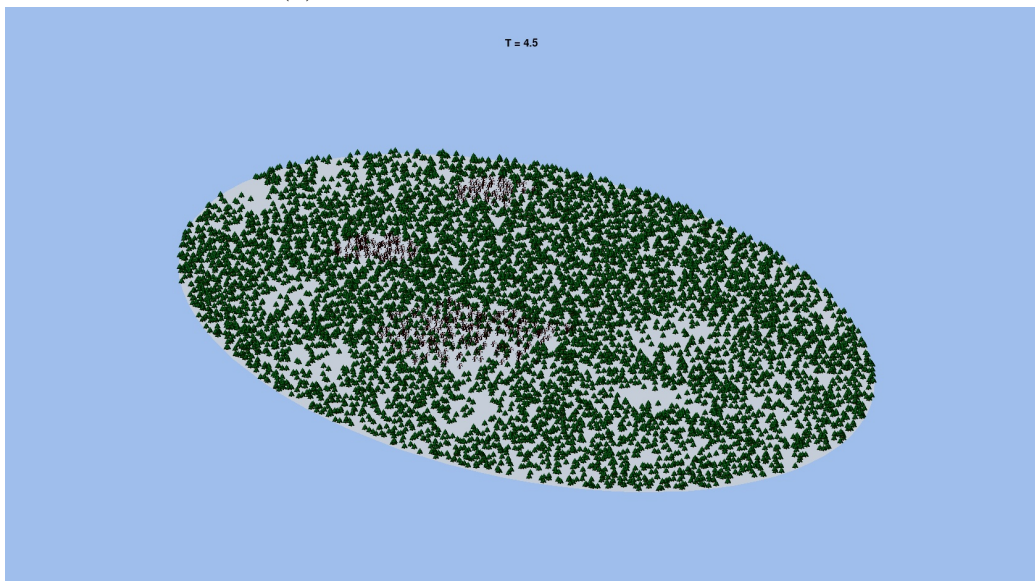


FIGURE 13 – Images tirées de la visualisation du modèle à quatre équations avec méthode des différences finies et Runge-Kutta.



(a) Feux, arbres morts et deux espèces



(b) Arbres morts, domination des arbres boréaux

FIGURE 14 – Images tirées de la visualisation du modèle à quatre équations avec méthode des éléments finis sur un domaine elliptique.

Références

- [1] Grégoire Allaire. *Numerical analysis and optimization : an introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. OUP Oxford, 2007.
- [2] Christel Baier and Joost-Pieter Katoen. *Principles of model checking*. The MIT Press, Cambridge, Mass, 2008.
- [3] Guillaume Cantin. Non-existence of the global attractor for a partly dissipative reaction-diffusion system with hysteresis. *Journal of Differential Equations*, 299 :333–361, 2021.
- [4] Guillaume Cantin, Benoît Delahaye, and Beatriz Funatsu. On the degradation of forest ecosystems by extreme events : Statistical Model Checking of a hybrid model. *Ecological Complexity*, page 101039, April 2023.
- [5] IPCC Climate Change. impacts, adaptation, and vulnerability. contribution of working group ii to the sixth assessment report of the inter-governmental panel on climate change. *O., Roberts, DC, Tignor, M., Poloczanska, ES, Mintenbeck, K., Alegría, A., Craig, M., Langsdorf, S., Löschke, S., Möller, V., et al., Eds*, 3056, 2022.
- [6] Le Huy Chuan, Tohru Tsujikawa, and Atsushi Yagi. Stationary solutions to forest kinematic model. *Glasgow Mathematical Journal*, 51(1) :1–17, January 2009.
- [7] Miguel Montoro Girona, Hubert Morin, Sylvie Gauthier, and Yves Bergeron, editors. *Boreal forests in the face of climate change : sustainable management*, volume 74 of *Advances in Global Change Research*. Springer International Publishing, Cham, 2023.
- [8] Frédéric Hecht. New development in freefem++. *Journal of numerical mathematics*, 20(3-4) :251–266, 2012.
- [9] Gilbert Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM journal on numerical analysis*, 5(3) :506–517, 1968.
- [10] Atsushi Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer Science & Business Media, 2009.